POSICIÓN RELATIVA DE RECTAS I

Ejercicio nº 1.-

a) Investiga la posición relativa de las dos rectas siguientes en el espacio:

La primera está dada por $x - 5 = y - 7 = z$, y la segunda, por los planos:

$$\begin{cases} 2x - 3y + 11 = 0 \\ y - 2z - 7 = 0 \end{cases}$$. **Explica el procedimiento.**

b) Halla si es posible, el punto de intersección.

Ejercicio nº 2.-

Consideramos las dos rectas:

$$r: \begin{cases} x + y + z + 3 = 0 \\ x - y - z - 1 = 0 \end{cases}$$

$$s: \frac{x+1}{2} = y + 1 = \frac{z+d}{-2}$$

Halla el valor de d para que las rectas se corten. Halla el punto de intersección para el valor de d obtenido.

Ejercicio nº 3.-

a) Estudia la posición relativa de las siguientes rectas:

$$r: \begin{cases} 2x + y - z = 4 \\ x - 2y + 2z = 2 \end{cases} \quad \text{y} \quad s: \frac{x-2}{2} = \frac{y+1}{-10} = \frac{z}{-6}$$

b) Comprueba si los puntos $A(1, 0, -2)$ y $B(2, -10, -6)$ pertenecen a alguna de las rectas anteriores.

Ejercicio nº 4.-

Estudia la posición relativa de las rectas r_1 y r_2:

$$r_1: \begin{cases} x + y - 2z + 1 = 0 \\ 2x - y + z - 1 = 0 \end{cases} \qquad r_2: \begin{cases} x = -3\lambda \\ y = 1 + 3\lambda \\ z = -3\lambda \end{cases}$$

Razona la respuesta.

Ejercicio nº 5.-

Estudia la posición relativa de las siguientes rectas según los valores de k:

$$r: \frac{x-1}{2} = \frac{y-3}{4} = \frac{z}{5} \quad \text{y} \quad s: \frac{x-3}{2} = y = \frac{z-k}{3}$$

Ejercicio nº 6.-

Estudia la posición relativa de las siguientes rectas según los valores de k:

$$r: \frac{x-1}{2} = \frac{y-3}{4} = \frac{z}{5} \quad \text{y} \quad s: \frac{x-3}{2} = y = \frac{z-k}{3}$$

SOLUCIONES

Solución nº 1:

a) • Primera recta, $r:\begin{cases}\text{Punto}: R(5,7,0)\\ \text{Vector dirección}: \vec{d}_r=(1,1,1)\end{cases}$

• Segunda recta, $s:\begin{cases}\text{Punto: } y=1,\ x=-4,\ z=-3 \ \to\ S(-4,1,-3)\\ \text{Vector dirección: } \vec{d}_s=(2,-3,0)\times(0,1,-2)=(6,4,2)\end{cases}$

Los vectores dirección $\vec{d}_r$ y $\vec{d}_s$ no son paralelos. Por tanto, r y s se cortan o se cruzan. Para averiguar si ocurre lo uno o lo otro, vemos si el vector $\overrightarrow{RS}$, está o no en el mismo plano que $\vec{d}_r$ y $\vec{d}_s$. Para ello estudiaremos el determinante de la matriz formada por las coordenadas de $\vec{d}_r$, $\vec{d}_s$ y $\overrightarrow{RS}$.

$\overrightarrow{RS}=(-9,-6,-3)$

$$\begin{vmatrix}1&1&1\\6&4&2\\-9&-6&-3\end{vmatrix}=-6\begin{vmatrix}1&1&1\\3&2&1\\3&2&1\end{vmatrix}=0$$

Por tanto, $\overrightarrow{RS}$ está en el mismo plano que r y s, lo que implica que las rectas r y s se cortan.

b) Expresamos la primera recta en paramétricas: $\begin{cases}x=5+\lambda\\ y=7+\lambda\\ z=\lambda\end{cases}$

Sustituimos en uno de los planos que definen a la segunda recta:

$2(5+\lambda)-3(7+\lambda)+11=0 \quad\to\quad \lambda=0$

Sustituimos este valor de λ y obtenemos $P(5, 7, 0)$.

Solución nº 2:

• Veamos cuáles son las ecuaciones paramétricas de r:

Un punto de r: $y=0 \ \to\ x=1,\ z=-2 \ \to\ R(-1, 0, -2)$

Vector dirección: $(1, 1, 1)\times(1, -1, -1)=(0, 2, -2) \parallel (0, 1, -1)$

Ecuaciones paramétricas de r: $\begin{cases}x=-1\\ y=\lambda\\ z=-2-\lambda\end{cases}$

• Ecuaciones paramétricas de s:

Un punto: $(-1, -1, -d)$

Vector dirección: $(2, 1, -2)$

Ecuaciones paramétricas de s: $\begin{cases}x=-1+2\mu\\ y=-1+\mu\\ z=-d-2\mu\end{cases}$

Para que r y s se corten, el siguiente sistema ha de tener solución:

$$\left.\begin{aligned}-1&=-1+2\mu\\ \lambda&=-1+\mu\\ -2-\lambda&=-d-2\mu\end{aligned}\right\}\ \begin{aligned}&\mu=0\\ &\lambda=-1\\ &-1=-d \ \to\ d=1\end{aligned}$$

Si $d=1$, las rectas se cortan en el punto $(-1, -1, -1)$, (se obtiene al sustituir λ en las ecuaciones de r, o bien μ y d en las ecuaciones de s).

Solución nº 3:

a) $r:\begin{cases}\text{Vector dirección: } \vec{d}_1=(2,1,-1)\times(1,-2,2)=(0,-5,-5)\\ \text{Un punto: si } z=0 \to y=0,\ x=2 \ \to P(2,0,0)\end{cases}$

$s:\begin{cases}\text{Vector dirección: } \vec{d}_2=(2,-10,-6)\\ \text{Un punto: } Q(2,-1,0)\end{cases}$ $\overrightarrow{PQ}=(0,-1,0)$

El rango de la matriz formada por las coordenadas de los vectores $\vec{d}_1$, $\vec{d}_2$ y $\overrightarrow{PQ}$ nos informa sobre la posición relativa de r y s.

$$\begin{vmatrix} 0 & -5 & -5 \\ 2 & -10 & -6 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & -5 \\ 2 & -6 \end{vmatrix} = 10 \neq 0$$

El rango de $\left(\vec{d}_1, \vec{d}_2, \overrightarrow{PQ}\right)$ es tres. Por tanto, las rectas se cruzan.

b) Ni A ni B pertenecen a las rectas r y s.

Solución nº 4:

$$r_1 : \begin{cases} \text{Vector de dirección: } \vec{d}_1 = (1, 1, -2) \times (2, -1, 1) = (-1, -5, -3) \\ \text{Un punto: si } z = 0 \rightarrow x = 0,\ y = -1 \rightarrow R_1(0, -1, 0) \end{cases}$$

$$r_2 : \begin{cases} \text{Vector dirección: } \vec{d}_2 = (-3, 3, -3) \\ \text{Un punto: } R_2\,(0, 1, 0) \end{cases} \qquad \overrightarrow{R_1R_2} = (0, 2, 0)$$

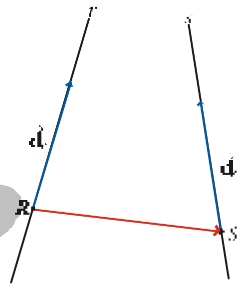
El rango de la matriz formada por las coordenadas de los vectores $\vec{d}_1$, $\vec{d}_2$ y $\overrightarrow{R_1R_2}$ nos informa sobre la posición relativa de r_1 y r_2:

$$\begin{vmatrix} -1 & -5 & -3 \\ -3 & 3 & -3 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -2 \cdot \begin{vmatrix} -1 & -3 \\ -3 & -3 \end{vmatrix} = -2 \cdot (-6) = 12 \neq 0$$

El rango de $(\vec{d}_1, \vec{d}_2, \overrightarrow{R_1R_2})$ es 3. Por tanto, las rectas se cruzan.

Solución nº 5:

$$\left.\begin{array}{l} r:\ \vec{d}_r = (2, 4, 5) \ \rightarrow \ R = (1, 3, 0) \\ s:\ \vec{d}_s = (2, 1, 3) \ \rightarrow \ S = (3, 0, k) \end{array}\right\} \overrightarrow{RS} = (2, -3, k)$$



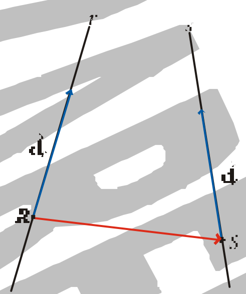
Estudiaremos el rango de la matriz formada por las coordenadas de $\vec{d}_r$, $\vec{d}_s$ y $\overrightarrow{RS}$:

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 3 \\ 2 & -3 & k \end{vmatrix} = -6k + 2;\ -6k + 2 = 0 \ \rightarrow \ k = \frac{1}{3}$$

Si $k = \frac{1}{3}$ los vectores $\vec{d}_r$, $\vec{d}_s$ y $\overrightarrow{RS}$ son linealmente dependientes, por tanto las rectas se cortan. Si $k \neq \frac{1}{3}$, las rectas se cruzan.

Solución nº 6:

$$\left.\begin{array}{l} r:\ \vec{d}_r = (2, 4, 5) \ \rightarrow \ R = (1, 3, 0) \\ s:\ \vec{d}_s = (2, 1, 3) \ \rightarrow \ S = (3, 0, k) \end{array}\right\} \overrightarrow{RS} = (2, -3, k)$$



Estudiaremos el rango de la matriz formada por las coordenadas de $\vec{d}_r$, $\vec{d}_s$ y $\overrightarrow{RS}$:

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 3 \\ 2 & -3 & k \end{vmatrix} = -6k + 2;\ -6k + 2 = 0 \ \rightarrow \ k = \frac{1}{3}$$

Si $k = \frac{1}{3}$ los vectores $\vec{d}_r$, $\vec{d}_s$ y $\overrightarrow{RS}$ son linealmente dependientes, por tanto las rectas se cortan. Si $k \neq \frac{1}{3}$, las rectas se cruzan.